Principios de Econometría y Econometría Empresarial I

Ejercicios resueltos y exámenes

Recopilados por Ezequiel Uriel

I EJERCICIOS RESUELTOS

II EXÁMENES DE ECONOMETRÍA

III EXÁMENES DE ECONOMETRÍA EMPRESARIAL

IV EXÁMENES DE PRINCIPIOS DE ECONOMETRÍA

Nota: Los ejercicios con asterisco no corresponden al programa actual de Principios de Econometría

I EJERCICIOS RESUELTOS

1 Un investigador ha estimado el siguiente modelo con una muestra de 5 observaciones:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

Una vez realizada la estimación extravía toda la información de que disponía excepto la que aparece en la siguiente tabla:

Núm. obs.	X_t	$\hat{u}_t$
1	1	2
2	3	-3
3	4	0
4	5	¿?
5	6	¿?

Con la información anterior el investigador debe calcular una estimación de la varianza de las perturbaciones aleatorias ¿Cómo debe proceder?

2 Un investigador considera que la relación entre consumo (C_t) y renta (R_t)debe ser estrictamente proporcional. Por ello, plantea el siguiente modelo:

$$C_t = \beta_2 R_t + u_t$$

a) Deduzca la fórmula para estimar β_2

b) Deduzca la fórmula para estimar σ^2

c) En este modelo, ¿a qué es igual $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t$?

3 En lenguaje estadístico se suelen hacer en muchas ocasiones afirmaciones como la siguiente:

"Sea una muestra aleatoria simple de tamaño *T* extraída de una variable *X* con distribución normal $N(\alpha,\sigma)$".

a) Exprese el modelo anterior con lenguaje econométrico, introduciendo un término de perturbación.

b) Deduzca la formula para estimar α

c) Deduzca la formula para estimar σ^2

d) En este modelo, ¿a qué sería igual $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t$?

4 Sea el siguiente modelo que relaciona el gasto en educación (E_i) con la renta disponible (R_i):

$$E_i = \beta_1 + \beta_2 R_i + u_i$$

De la información obtenida de una muestra de10 familias se han obtenido los siguientes resultados:

$$\overline{E}=7 \quad \overline{R}=50 \quad \sum_{i=1}^{10} R_i^2 = 30.650 \quad \sum_{i=1}^{10} E_i^2 = 622 \quad \sum_{i=1}^{10} R_i E_i = 4.345$$

Se pide:

a) Obtenga una estimación de β_1 y β_2.

b) Estime la elasticidad gasto en educación-renta para el promedio de las familias de la muestra.

c) Descomponga la varianza total del gasto en educación de la muestra en varianza explicada y varianza residual.

d) Calcule el coeficiente de determinación.

e) Estime la varianza de las perturbaciones

f) Contraste si la renta disponible tiene o no una influencia significativa sobre el gasto en educación.

g) Para *E*=7 y *R*=50, contraste si la elasticidad gasto en educación-renta disponible es o no superior a 1.

Sea el siguiente modelo

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \qquad t = 1,\ 2, \ldots, T$$

5 Al estimar este modelo con una muestra de tamaño 11 se han obtenido los siguientes resultados:

$$\sum_{t=1}^{T} X_t = 0 \qquad \sum_{t=1}^{T} Y_t = 0 \qquad \sum_{t=1}^{T} X_t^2 = B \qquad \sum_{t=1}^{T} Y_t^2 = E \qquad \sum_{t=1}^{T} X_t Y_t = F$$

Se pide:

1) Obtener la estimación de β_2 y β_1
2) Obtener la suma de cuadrados de los residuos
3) Obtener el estadístico para contrastar $H_0 : \beta_2 = 0 \quad H_1 : \beta_2 \neq 0$
4) Contrastar las hipótesis del punto 3 bajo el supuesto de que $EB = 2F^2$
5) Calcular el coeficiente de determinación bajo el supuesto de que $EB = 2F^2$
6) Contrastar las hipótesis del punto 3 bajo el supuesto de que $EB = F^2$

Soluciones

1

El primer problema que tenemos que resolver es hallar los valores de los residuos para las observaciones número 4 y 5. Para ello, tenemos en cuenta que las dos ecuaciones normales de los coeficientes imponen restricciones sobre los residuos, ya que

$$\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t X_t = 0$$

Por lo tanto, en nuestro caso concreto se verificará que

$$\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \hat{u}_4 + \hat{u}_5 = 0$$
$$\hat{u}_1 X_1 + \hat{u}_2 X_2 + \hat{u}_3 X_3 + \hat{u}_4 X_4 + \hat{u}_5 X_5 = 0$$

Sustituyendo los valores de la tabla se obtiene que

$$2 - 3 + 0 + \hat{u}_4 + \hat{u}_5 = 0$$
$$2 \times 1 - 3 \times 3 + 0 \times 4 + 5\hat{u}_4 + 6\hat{u}_5 = 0$$

es decir,

$$\hat{u}_4 + \hat{u}_5 = 1$$
$$5\hat{u}_4 + 6\hat{u}_5 = 7$$

Resolviendo, el sistema anterior, se obtiene que

$$\hat{u}_4 = -1 \qquad \hat{u}_5 = 2$$

El estimador insesgado de la varianza de las perturbaciones viene dado por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}{T - 2}$$

Aplicando la fórmula nuestro caso se obtiene que

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{5} \hat{u}_t^2}{5 - 2} = \frac{2^2 + (-3)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2}{3} = 6$$

Obsérvese que en el denominador de la fórmula figura *T*-2 (en lugar de *T*), debido precisamente a que se pierden 2 grados de libertad por las restricciones que imponen las ecuaciones normales.

2 Para que exista una estricta proporcionalidad entre el consumo y la renta se debe verificar la siguiente relación teórica:

$$\frac{C_t}{R_t} = \text{constante}$$

El modelo propuesto –si prescindimos de la perturbación, que no altera el valor medio de la variable endógena - se verifica esta propiedad ya que

$$\frac{C_t}{R_t} = \beta_2$$

En cambio, en un modelo con término independiente no se verificaría esa propiedad, ya que en ese caso

$$\frac{C_t}{R_t} = \frac{\beta_1 + \beta_2 R_t}{R_t} = \frac{\beta_1}{R_t} + \beta_2 \neq \text{constante}$$

a) Para estimar β_2 hay que minimizar la siguiente expresión:

$$S = \sum_{t=1}^{T} \left[\hat{u}_t\right]^2 = \sum_{t=1}^{T} \left[C_t - \hat{\beta}_2 R_t\right]^2$$

Por lo tanto,

$$\frac{dS}{d\hat{\beta}_2} = -2\sum_{t=1}^{T} \left[C_t - \hat{\beta}_2 R_t\right] R_t = 0$$

es decir,

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} C_t R_t}{\sum_{t=1}^{T} R_t^2}$$

b) El estimador de la varianza de las perturbaciones

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} [\hat{u}_t]^2}{T-1} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left[C_t - \hat{\beta}_2 R_t\right]^2}{T-1}$$

En la expresión anterior, en el denominador aparece T-1, debido a que se ha perdido un solo grado de libertad, ya que solamente hay una ecuación normal que imponga restricciones sobre los residuos.

c) Como no hay término independiente, la recta ajustada pasa por el origen. En este caso, a diferencia del caso en que ajustamos una recta sin restricciones (es decir, con término independiente), solamente tenemos una ecuación normal para el ajuste, que viene dada por

$$\sum_{t=1}^{T} \left[C_t - \hat{\beta}_2 R_t\right] R_t = \sum_{t=1}^{T} [\hat{u}_t] R_t = 0$$

En cambio, al no haber término independiente, no tenemos una ecuación normal relativa a ese término, y por tanto, no podemos establecer que se cumpla que $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t$ =0. Recordemos que esta propiedad se deducía de la primera ecuación normal de la recta asociada al término independiente. En este caso, al prescindir del término independiente, se prescinde también de la primera ecuación normal. En consecuencia, no podemos predecir cuál es el valor de $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t$.

3 a)En el lenguaje econométrico el modelo se puede expresar de la siguiente forma:

$$X_t = \alpha + u_t$$

donde

$$u_t \sim NID(0, \sigma^2)$$

El hecho de que la muestra se ha extraído en un muestreo aleatorio simple implica que las X_t y, por tanto, las perturbaciones aleatorias son independientes entre sí. Es decir, $E(u_t u_{t'}) = 0$, para $t \neq t'$. Por otra parte, la varianza de las X extraídas tendrán la misma varianza ya que provienen de una población constante.

De acuerdo con lo anterior, se deduce que

$$E(X_t) = E(\alpha + u_t) = \alpha$$

$$E(X_t - \alpha)^2 = E(u_t)^2 = \sigma^2$$

Por tanto,

$$X_t \sim N(\alpha, \sigma^2)$$

Una diferencia de carácter meramente formal. En lenguaje estadístico se suele utilizar la desviación típica para como dispersión, mientras que en econometría es más usual utilizar la varianza.

b) Para estimar α aplicamos el criterio mínimo-cuadrático:

$$S = \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{T} [X_t - \hat{\alpha}]^2$$

Por lo tanto,

$$\frac{dS}{d\hat{\alpha}} = -2\sum_{t=1}^{T} [X_t - \hat{\alpha}] = 0$$

es decir,

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t}{T} = \overline{X}$$

Como puede verse, la ecuación normal nos indica que

$$\sum_{t=1}^{T} [X_t - \hat{\alpha}] = \sum_{t=1}^{T} \hat{u} = 0$$

lo que implica una restricción sobre los residuos.

c) El estimador de σ^2 vendrá dado por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}{T-1} = \frac{\sum_{t=1}^{T} [X_t - \hat{\alpha}]^2}{T-1}$$

En este caso, dado que solo hay una restricción sobre los residuos, el número de grados de libertad es T-1.

d) Como ya hemos visto en el apartado b), $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t = 0$

4

a)

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_i - \overline{R})(E_i - \overline{E})}{\sum_{t=1}^{T} (R_i - \overline{R})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_i E_i - \overline{E} R_i - \overline{R} E_i + \overline{R}\overline{E})}{\sum_{t=1}^{T} (R_i^2 - 2\overline{R} R_i + \overline{R}^2)^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T} R_i E_i - \overline{E} \sum_{t=1}^{T} R_i - \overline{R} \sum_{t=1}^{T} E_i + T\overline{R}\overline{E}}{\sum_{t=1}^{T} R_i^2 - 2\overline{R} \sum_{t=1}^{T} R_i + T\overline{R}^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_i E_i - \overline{E}\overline{R}T - \overline{R}\overline{E}T + T\overline{R}\overline{E}}{\sum_{t=1}^{T} R_i^2 - 2\overline{R}\overline{R}T + T\overline{R}^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T} R_i E_i - T\overline{R}\overline{E}}{\sum_{t=1}^{T} R_i^2 - T\overline{R}^2} = \frac{4345 - 10 \times 50 \times 7}{30.650 - 10 \times 50^2} = \frac{845}{5.650} = 0,1496$$

$$\hat{\beta}_1 = \overline{E} - \hat{\beta}_2 \overline{R} = 7 - 0,1496 \times 50 = -0,4779$$

Por lo tanto, la recta de regresión ajustada es la siguiente:

$$\hat{E}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 R_i = -0,4778 + 0,1496 \times R_i$$

b) La elasticidad gasto en educación-renta estimada para el promedio de las familias de la muestra será la siguiente:

$$\hat{\varepsilon}_{E/R} = \frac{d\hat{E}}{dR} \times \frac{\overline{R}}{\overline{E}} = \hat{\beta}_2 \times \frac{\overline{R}}{\overline{E}} = 0,1496 \times \frac{50}{7} = 1,0683$$

c) La descomposición de la varianza total del gasto en educación será igual a

$$\frac{\sum_{i=1}^{T} \left[E_i - \overline{E} \right]^2}{T} = \frac{\sum_{i=1}^{T} \left[\hat{E}_i - \overline{\hat{E}} \right]^2}{T} + \frac{\sum_{i=1}^{T} \hat{u}_i^2}{T}$$

Para la muestra disponible se obtienen los siguientes resultados:

Varianza total:

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} \left[E_i - \overline{E} \right]^2}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} E_i^2 - 10 \times \overline{E}^2}{10} = \frac{622 - 10 \times 7^2}{10} = 13,2$$

Varianza explicada:

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} \left[\hat{E}_i - \overline{\hat{E}} \right]^2}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \left[(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 R_i) - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \overline{R}) \right]^2}{10}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{10} \left[\hat{\beta}_2 (R_i - \overline{R}) \right]^2}{10} = \hat{\beta}_2^2 \frac{\sum_{i=1}^{10} (R_i - \overline{R})^2}{10}$$

$$= \hat{\beta}_2 \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_i - \overline{R})(E_i - \overline{E})}{\sum_{t=1}^{T} (R_i - \overline{R})^2} \frac{\sum_{i=1}^{10} (R_i - \overline{R})^2}{10} = \hat{\beta}_2 \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_i - \overline{R})(E_i - \overline{E})}{10}$$

$$= 0,1496 \times \frac{845}{10} = 12,6376$$

Varianza residual:

La varianza residual se obtiene como diferencia entre la varianza total y la varianza explicada por la regresión:

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} \hat{u}_i^2}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \left[E_i - \overline{E} \right]^2}{10} - \frac{\sum_{i=1}^{10} \left[\hat{E}_i - \overline{\hat{E}} \right]^2}{10} = 13,2 - 12,6376 = 0,5624$$

d) El coeficiente de determinación se define como la proporción de la varianza total explicada por la regresión, es decir,

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}\left[\hat{E}_i - \bar{\hat{E}}\right]^2}{\sum_{i=1}^{10}\left[E_i - \bar{E}\right]^2} = \frac{126,376}{13,2} = 0,9574$$

e) La estimación de la varianza de las perturbaciones vendrá dada por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{T}\hat{u}_i^2}{T-2} = \frac{5,624}{8} = 0,703$$

f) Para contrastar si la renta disponible tiene o no una influencia significativa sobre el gasto en educación, seguiremos las siguientes etapas:

1) Las hipótesis nula y alternativa son las siguientes:

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

2) El estadístico para el contraste es el siguiente:

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(R_i - \bar{R})^2}}} = \frac{0,1496}{\frac{0,8385}{\sqrt{5.650}}} = \frac{0,1496}{0,01115} = 13,41$$

El estadístico t, bajo la hipótesis nula se distribuye como t de Student con T-2 grados de libertad, es decir,

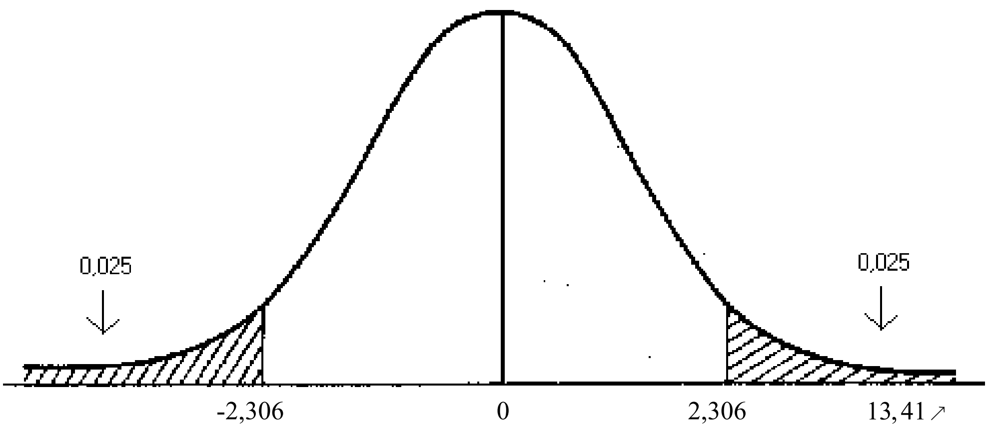
$$t \sim t_{T-2}$$

3) Regla de decisión

Si seleccionamos un nivel de significación del 5%, entonces en las tablas de la t de Student con T-2 grados de libertad, se encuentra el siguiente valor en las tablas:

$$t_{T-2}^{\alpha/2} = t_8^{0,05/2} = 2,306$$

Como $|t| > \left|t_{T-2}^{\alpha/2}\right|$, es decir, como $|13,41| > |2,306|$, se rechaza la hipótesis nula.



g)

1) Para contrastar si la elasticidad gasto en educación-renta disponible es o no superior a 1, para E=7 y R=50 (es decir, para el promedio de las familias de la muestra), sabemos que

$$\varepsilon_{E/R} = \beta_2 \times \frac{R}{E} = \beta_2 \times \frac{50}{7}$$

Debemos contrastar si $\varepsilon_{E/R} = \beta_2 \times \frac{50}{7} = 1$, frente a la alternativa $\varepsilon_{E/R} > 1$.

Por lo tanto, las hipótesis nula y alternativa son las siguientes:

$$H_0 : \beta_2 = 1 \times \frac{7}{50} = 0,14$$

$$H_1 : \beta_2 > 0,14$$

2) El estadístico para el contraste es el siguiente:

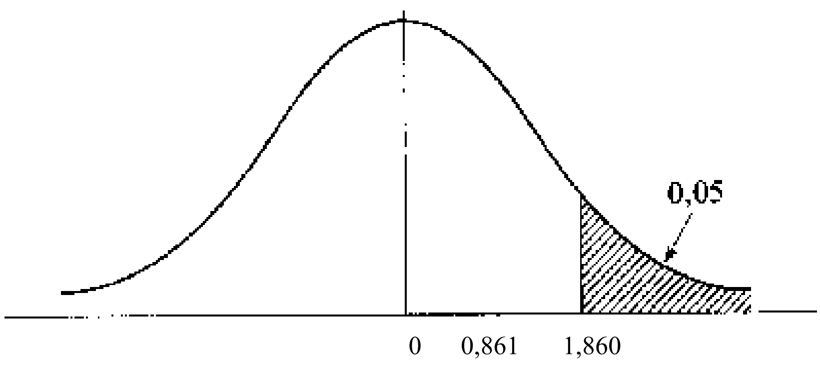
$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2^0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} = \frac{0,1496 - 0,14}{0,01115} = 0,8610$$

3) Regla de decisión

Si seleccionamos un nivel de significación del 5%, entonces en las tablas de la t de Student con T-2 grados de libertad, se encuentra el siguiente valor en las tablas para un contraste de una cola:

$$t_{T-2}^{\alpha} = t_8^{0,05} = 1,860$$

Como $|t| < |t_{T-2}^{\alpha}|$, es decir, como $|0,861| < |1,860|$, no puede aceptar la hipótesis alternativa, con un nivel de significación del 5%, de que la elasticidad gastos en educación-renta disponible es superior a 1 en el punto (E=7;R=50).



5

$$1)\ \hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_t X_t - T\overline{YX}}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2 - T\bar{X}^2} = \frac{F}{B}$$

2) $$\sum_{t=1}^{T}\hat{Y}_t^2 = \hat{\beta}_2\sum_{t=1}^{T}Y_tX_t = \frac{F}{B}F = \frac{F^2}{B}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{T}Y_t^2 - \sum_{t=1}^{T}\hat{Y}_t^2 = E - \frac{F^2}{B} = \frac{EB-F^2}{B}$$

3) $$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{t=1}^{T}X_t^2} = \frac{\frac{EB-F^2}{B(T-2)}}{B} = \frac{EB-F^2}{B^2(T-2)} = \frac{EB-F^2}{B^2 9}$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}} = \frac{\frac{F}{B}}{\sqrt{\frac{EB-F^2}{9B^2}}}$$

4) $$t = \frac{\frac{F}{B}}{\sqrt{\frac{EB-F^2}{9B^2}}} = \frac{\frac{F}{B}}{\sqrt{\frac{2F^2-F^2}{9B^2}}} = 3$$